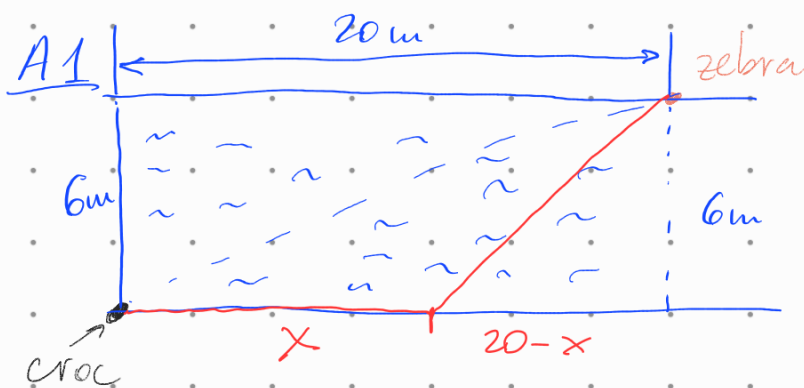


Spaß an Mathe : wie?

- Erfolgserlebnisse
- „Der Weg ist das Ziel“
- Anwendungen / Verbindung zur realen Welt
- Mathe ist ein Puzzle – Spiele damit
- Zusammenhänge entdecken,
- „Paradoxa“
- Neues Lernen
- Anwendungen!
- Teamarbeit / Brainstorming
- Unterbrechen von Problemen
- Kreativ sein, um die Ecke denken
- Verschiedene Wege führen zur selben Antwort
- Arbeiten mit Konzepten



Wie kann das Krokodil am schnellsten zur Zebra gelangen

Fluss: keine Strömung

Geschw. : am Land v m/s
 im Wasser w m/s ($v > w$)

Für welche Funktion wird Minimum

gesucht

$$f(x) = \frac{x}{v} + \frac{\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}}{w} \quad (s) \quad 0 \leq x \leq 20$$

Pythagoras

Sei ab jetzt konkret $v = 2,5 \text{ m/s}$, $w = 2 \text{ m/s}$

Wie lange braucht das Krokodil, wenn es

- 1) nur schwimmt
- 2) kürzeste Strecke schwimmt
- 3) minimal.

Lösung

$$\begin{aligned} 1) \quad f(0) &= \frac{0}{2,5} + \frac{\sqrt{(20-0)^2 + 6^2}}{2} \\ &= 0 + \frac{\sqrt{400 + 36}}{2} = \frac{\sqrt{436}}{2} \approx \frac{20,88}{2} = 10,44(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(20) &= \frac{20}{2,5} + \frac{\sqrt{(20-20)^2 + 6^2}}{2} \\ &= \frac{40}{5} + \frac{\sqrt{6^2}}{2} = 8 + \frac{6}{2} = 8 + 3 = 11(s) \end{aligned}$$

3) Die Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{2,5} + \frac{\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}}{2} \right)' \\ &= \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2(20-x)}{\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}} \end{aligned}$$

NR

$$\left(\sqrt{(20-x)^2 + 6^2} \right)'$$

Kettenregel

$$= \left(((20-x)^2 + 6^2)^{\frac{1}{2}} \right)'$$
$$= \frac{1}{2} ((20-x)^2 + 6^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot ((20-x)^2 + 6^2)'$$
$$= \frac{1}{2} ((20-x)^2 + 6^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2(20-x))$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{(20-x)}{2\sqrt{(20-x)^2+6^2}}$$

Num $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{(20-x)}{2\sqrt{(20-x)^2+6^2}} = 0$$

$$\frac{20-x}{\sqrt{(20-x)^2+6^2}} = \frac{4}{5}$$

$$20-x = \frac{4}{5} \sqrt{(20-x)^2+6^2} \quad |(\cdot)^2!$$

$$(20-x)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot ((20-x)^2+6^2)$$

$$(20-x)^2 - \frac{16}{25} (20-x)^2 = \frac{4^2 \cdot 6^2}{5^2}$$

$$(20-x)^2 \left(1 - \frac{16}{25}\right) = \frac{16}{25} \cdot 36$$

$$(20-x)^2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \cdot 36^4$$

$$(20-x)^2 = 64 \quad | \sqrt{\cdot}!$$

"oder" $\begin{cases} 20-x = -8 \\ 20-x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 28 \\ \underline{x = 12} \end{cases} \quad \swarrow \quad 0 \leq x \leq 20$

Teste $x = 12$

$$\begin{aligned} f(12) &= 12 \cdot \frac{1}{2,5} + \frac{\sqrt{(20-12)^2+6^2}}{2} \\ &= 12 \cdot \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{8^2+6^2}}{2} = \frac{24}{5} + \frac{\sqrt{100}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{24}{5} + \frac{10}{2} = 4 + \frac{4}{5} + 5 = 9 + \frac{4}{5} = \underline{9,8 \text{ (s)}}$$

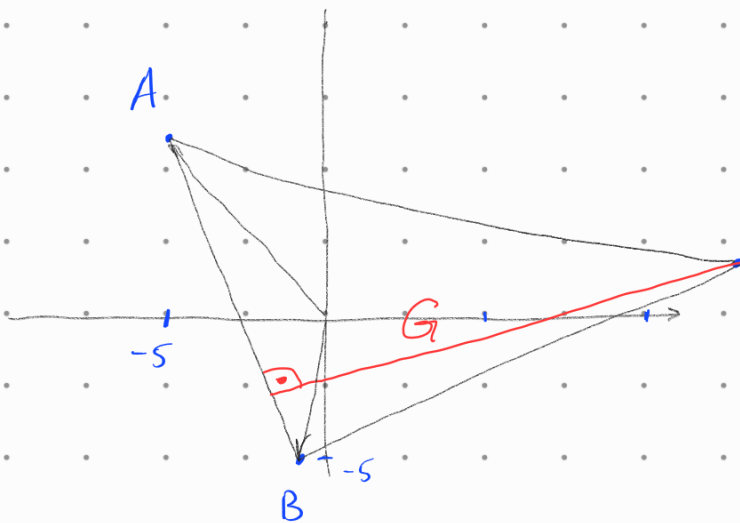
$$< 10,88 \text{ (1)}$$

$$\text{oder } 11 \text{ (2)}$$

also ist es das Minimum

- Physikalische Formeln (Zeit $\leftrightarrow$ Geschw.)
- Funktion ableiten: Kettenregel, $(\sqrt{\cdot})'$
- Pythagoras, Dreiecke
- Optimierung, Kurvendiskussion, Extrema
- Gleichungen umformen

A2 Die Ecken des Dreiecks Δ sind
 $A(-5, 7)$, $B(-1, -5)$ und $C(13, 3)$



a) Zeige, dass die Gleichung der Höhe von C $x - 3y = 4$ ist
gerade G

b) Finde die Gleichung der Seitenhalbierenden von B

c) Finde den Schnittpunkt der Geraden aus (a) und (b)

d) Bestimme die Fläche des Δ .

a) 1) Überprüfe $C \in G$ (C liegt auf G)
 Setze $x=13, y=3$ in die Gleichung ein

$$13 - 3 \cdot 3 = 4 \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad C \in G$$

2) Überprüfe $\vec{AB} \perp G$

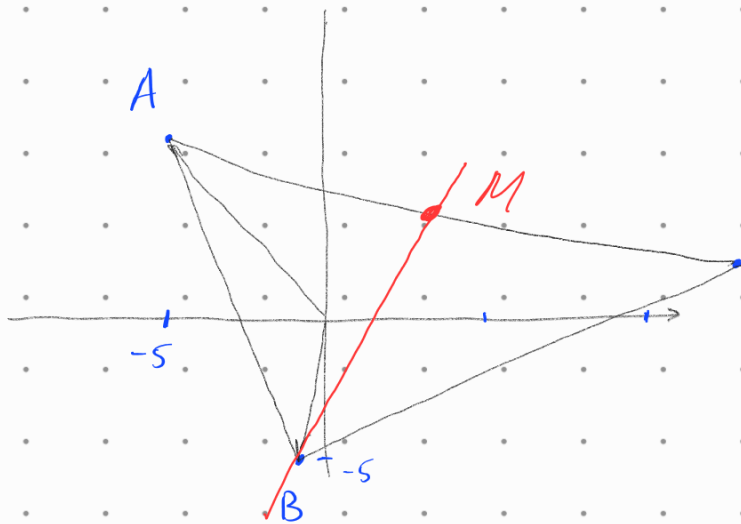
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (4, -12)$$

$G: \underline{1}x - \underline{3}y = 4$ $n = (1, -3)$ ist der Normalenvektor, d.h. $n \perp G$

$\vec{AB} \perp G \Leftrightarrow \vec{AB} \parallel n \Leftrightarrow \vec{AB}$ ein Vielfaches von n ist

$$\vec{AB} = (4, -12) = 4(1, -3) = 4n \quad \checkmark$$

b)



Sei M die Mitte von AC .

G_2 , die Gerade durch B und M , suchen wir.

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OC}) = \frac{1}{2} ((-5, 7) + (13, 3)) \\ &= \frac{1}{2} (8, 10) = (4, 5) \end{aligned}$$

$$G_2 = \vec{OM} + r \cdot \vec{MB}$$

$$G_2: \vec{OM} + r \cdot \vec{MB}$$

Parameterdarstellung

$$G_2: (4,5) + r(5,10)$$

$$\vec{MB} = (-1, -5) - (4, 5) = (-5, -10)?$$

$$n_1 x + n_2 y = d$$

(n_1, n_2) ist der Normalenvektor, d.h. $\perp \vec{MB}$

$$\vec{BM} = (5, 10) \quad n = (10, -5)$$

$$u = (2, -1)$$

$$\langle n, \vec{BM} \rangle = \langle (2, -1), (5, 10) \rangle = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 10 = 0$$

$2x - y = d$ und es muss $M \in G_2$ gelten

$$d = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

$$\Rightarrow G_2: 2x - y = 3$$

c) Bestimme $G \cap G_2$

$$G: x - 3y = 4$$

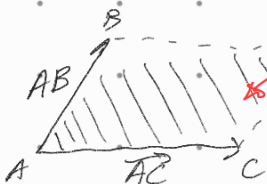
$$G_2: 2x - y = 3$$

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \xrightarrow{-2 \cdot I} \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 0 + 5y = -5 \end{cases} \Rightarrow y = -1$$

$$\stackrel{\text{in I}}{\Rightarrow} x = 4 + 3y = 4 - 3 = 1$$

$$G \cap G_2 = \{(1, -1)\}$$

d) Fläche von $\Delta = \frac{1}{2} \cdot \text{Seite} \cdot \text{Höhe}$

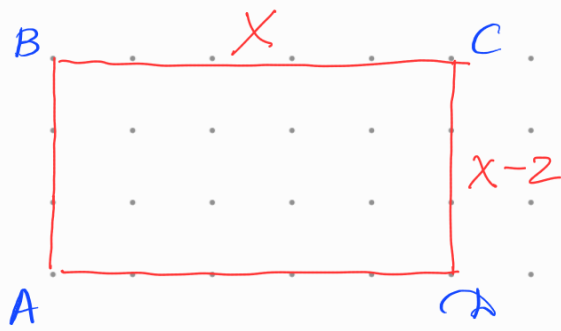


$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |\text{Seite} \times \text{Seite}| \quad (\times)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{Seite} \cdot \text{Seite} \cdot \sin$$

$$F = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 + 12 \cdot 18 \end{pmatrix} \right| = 100$$

A3



bekannt, dass

ABCD ist ein Rechteck
mit Seiten x (cm) und
 $x-2$ (cm)

Was sind die möglichen
Werte von x , falls
Fläche von ABCD < 15 (cm²)

$$2 < x < 5$$

$$F = x \cdot (x-2) < 15$$

$$(+1) x^2 - 2x - 15 < 0$$

$$\text{Löse } x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 60 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -3$$

$$(x-5)(x+3)$$

$$\Rightarrow -3 < x < 5 \text{ ist } x^2 - 2x - 15 < 0$$

$2 \leq x$ ergibt keinen Sinn, da Seiten > 0

